

# FERDE KÜLPONTOS NYOMÁSRA IGÉNYBE VETT BETON ÉS VASBETON KERESZTMETSZETEK SEMLEGES TENGELYÉNEK MEGHATÁROZÁSA RUGALMAS, BEREPEDT ÁLLAPOTBAN

SIPOS ANDRÁS ÁRPÁD\* – JUHÁSZ KÁROLY PÉTER\*\* – DOMOKOS GÁBOR\*\*\*

Vasbeton szerkezetek alakváltozásait, elmozdulásait a rugalmas, berepedt, úgynevezett II. feszültségi állapotban szokták vizsgálni. Külpontos nyomás esetén a semleges tengely meghatározása nemlineáris egyenletek megoldását követeli meg. A Vasbeton szakirodalomban nincs általánosan elfogadott módszer, ennek feltehetően az az oka, hogy eddig alkalmazott eljárások bonyolultak, és konvergenciájukról keveset lehet tudni.

Dolgozatunkban egy olyan új eljárást mutatunk be, melynek alapja egy direkt rekurzió, és amely az egyváltozós, szimmetrikus esetben alkalmazott, sokszor Pelikán-félének nevezett iterációs eljárás (Pelikán, 1972) természetes általánosításának tekinthető. A legegyszerűbb esetben (beton téglalap keresztmetszet) *bizonyítani* tudtuk, hogy az eljárás *mindig* konvergál, tehát kedvezőbben viselkedik, mint az eredeti Pelikán-módszer. Bonyolultabb esetekben ugyanezt a kedvező globális konvergenciát *tapasztaltuk* numerikusan.

**Kulcsszavak:** vasbeton, ferde külpontos nyomás, II. feszültségi állapot, számítógépes program, berepedt keresztmetszet, Pelikán-féle eljárás, semleges tengely, iteráció, konvergencia

## 1. BEVEZETÉS

Vasbeton szerkezetek alakváltozásait, elmozdulásait a rugalmas, berepedt, úgynevezett II. feszültségi állapotban szokták vizsgálni. Külpontos nyomás esetén a semleges tengely meghatározása általában másodnál magasabb fokú egyenletek megoldását követeli meg. A vasbeton szakirodalomban nincs általánosan elfogadott megoldási módszer, ennek feltehetően az az oka, hogy az eddig alkalmazott eljárások bonyolultak, és konvergenciájukról keveset lehet tudni. Bár ilyen típusú egyenletek megoldására több algoritmus is létezik, a szakirodalomban jobbra csak a probléma felvetése található meg (Cosenza, 1997). Azon dolgozatok

\* Építészmérnök hallgató. 1174 Budapest, Melczer u. 13.; e-mail: sa128@hszk.bme.hu

\*\* Építészmérnök hallgató. 6000 Kiskunfélegyháza, Bajza u. 39.; e-mail: jkp2000@freemail.hu

\*\*\* Tanszékvezető egyetemi tanár, okl. építészmérnök, a műszaki tudományok doktora. BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék. Tel.: 463-1493; e-mail: domokos@iit.bme.hu

(Brøndum-Nielsen, 1980, 1984, 1986; Rodríguez-Gutierrez – Aristizábal-Ochoa, 2000; Yen, 1991), melyek a feladat megoldását is közlik, többnyire valamely általános megoldó algoritmussal dolgoznak (pl. Newton–Raphson-módszer, Gauss-módszer), vagy optimalizálási feladatra vezetnek vissza a problémát, de magának a megoldó eljárásnak a konvergenciájával nem foglalkoznak. Az említett szerzők közül egyedül Troels Brøndum-Nielsen foglalkozott a bonyolultabb algoritmust igénylő második feszültségi állapottal, a többiek mind a harmadik feszültségi állapotra vezettek le megoldásokat. Brøndum-Nielsen minden cikkében a két dimenziós Newton-Raphson-iterációt használja a nemlineáris egyenletek megoldására. Az eljárásról elismeri, hogy egyes bemenő adatokra divergál, ilyen esetben más becsült érték felvételét és új számítást javasol (Brøndum-Nielsen, 1984).

Dolgozatunkban egy olyan új eljárást mutatunk be, melynek alapja egy direkt rekurzió, és amely az egyváltozós, szimmetrikus esetben alkalmazott, sokszor Pelikán-félének nevezett iterációs eljárás (Pelikán, 1972) természetes általánosításának tekinthető. A Pelikán-módszerhez képest az általánosítás egyrészt a dolgozó keresztmetszet darab kiválasztását, más részből a ferde külpontosság kezelését foglalja magában. A legegyszerűbb esetben (beton téglalap keresztmetszet, egyenes külpontosság) *bizonyítani* tudtuk, hogy az eljárás *mindig* konvergál, tehát kedvezőbben viselkedik, mint az eredeti Pelikán-módszer. Ferde külpontosság és összetettebb keresztmetszetek esetében ugyanezt a kedvező globális konvergenciát *tapasztaltuk* numerikusan.

Eljárásunk lényege, hogy egy tetszőlegesen megadott egyenessel (semleges tengely), a keresztmetszetet két részre vágjuk szét. A dőféspontot tartalmazó részre megoldjuk az egyensúlyi egyenletekből levezetett egyenletrendszert, amely egy új semleges tengelyt ad meg. Az iteráció következő ciklusa ebből az új semleges tengelyből, illetve az általa kivágott keresztmetszet darabból indul ki. Vizsgálódásainkban ennek az iterációnak a konvergencia-tulajdonságaira voltunk kíváncsiak.

Dolgozatunkban először az eljárás szilárdságtani és matematikai alapjait ismertetjük, illetve megadjuk egyes jelölések definícióját, jelentését. Az általános algoritmus részletes ismertetése után homogén téglalap keresztmetszet esetén bebizonyítjuk, hogy szimmetrikus külpontos nyomás esetén a dolgozó keresztmetszet rész megfelelő kiválasztása a konvergencia-tulajdonságokat erősen befolyásolja; helyes választás esetén az eljárás minden kiinduló érték esetén konvergál. Végül összefoglaljuk eredményeinket, valamint az algoritmus alapján készített program segítségével érdekes példákat mutatunk be.

## 2. MATEMATIKAI LEÍRÁS

### 2.1. SZILÁRDSÁGTANI ALAPOK

Beton keresztmetszeten olyan keresztmetszetet értünk, amely homogén anyagú, csak nyomószilárdsággal rendelkezik, rugalmas feszültségi állapotban van. (Vizsgálatuknál nem vesszük figyelembe az anyag folyási feszültségét, tehát nem kerülhet részben vagy teljesen plasztifikálódott állapotba.) A kiszámolt semleges tengelyhez természetesen hozzárendelhető egy, a dőféspontban működő legnagyobb erő, amelynél a beton még nem folyik meg. Ilyen rugalmas határerő minden esetben található, mi azonban nem foglalkozunk kiszámításával.

Vasbeton keresztmetszeten olyan keresztmetszetet értünk, amelyre mindaz igaz, amit a beton keresztmetszetenél említettünk, de ezenkívül rendelkezik húzószilárdsággal is rendelkező tartományokkal. Ezeket ezentúl vasnak, vasaknak fogjuk hívni. Ezeknek a részeknek a feszültsége  $n$ -szerese a betonénak. Ez azt jelenti, hogy  $n$ -szeres területű, inerciájú betonként vesszük figyelembe a vasakat. Szilárdságtanilag  $n$  értéke a rugalmassági modulusok hányadosa, de konstansokról lévén szó, ennek az iterációs vizsgálat szempontjából nincs jelentősége.  $n$  konkrét keresztmetszetek vizsgálatánál válik fontossá, hiszen így lehet figyelembe venni az anyagtulajdonságok mellett például a beton kúszását is. A keresztmetszetben több ilyen tartomány is lehetséges, ezek számát  $\nu$ -vel jelöljük.

Feltesszük továbbá, hogy a Hooke-törvény és a Bernoulli–Navier-hipotézis érvényben van, valamint, hogy az eltolódások és elfordulások megfelelően kicsik. Az erőket, nyomatékokat, és a koordináta pontokat vektorok írják le, a választott koordináta-rendszer adja meg az előjelüket.

A levezetés során a keresztmetszet alakjára semmilyen megkötést nem teszünk. Globális  $[XY]$  koordináta-rendszeren egy, a keresztmetszethez képest rögzített, egyébként tetszőlegesen elhelyező koordináta-rendszert értünk. A dolgozó keresztmetszet-darab súlypontjában elhelyezkedő, a globális koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos koordinátatengelyű  $[xy]$  koordináta-rendszert nevezzük lokális koordináta-rendszernek.

A fenti feltevések miatt egy adott keresztmetszet dolgozó részében a  $\sigma$  feszültségek sík szerint oszlanak meg. Ezek szerint a semleges tengely egyenlete lokális  $[xy]$  koordináta-rendszerben felírva:

$$ax + by + c = 0, \quad (1)$$

ahol  $a$ ,  $b$ ,  $c$  konstansok, értéküket az egyensúlyi egyenletekből kapjuk  $c$  értéke közvetlenül adódik a vetületi egyenletből:

$$c = -\frac{1}{A}, \quad (2)$$

ahol  $A$  a dolgozó keresztmetszet-darab területe (Pelikán, 1972). A semleges tengely egyenlete (1) és (2) alapján:

$$ax + by - \frac{1}{A} = 0. \quad (3)$$

A (3) képlettel adott semleges tengely  $x_T, y_T$  tengelymetszeteit a lokális rendszerben adott  $a$  és  $b$  esetén az alábbi képletek szolgáltatják:

$$x_T = \frac{1}{aA}, \quad (4)$$

$$y_T = \frac{1}{bA}. \quad (5)$$

## 2.2. AZ ITERÁCIÓ ÁLTALÁNOS ALAKJA

Jelöléseinknél a továbbiakban felső index mindig az iteráció adott lépésére utal, míg az alsó index a különleges, a számítás szempontjából lényeges pontok megkülönböztetésére szolgál (pl.: dőféspont).

Külponos nyomás esetén, nyomószilárdsággal csak részben rendelkező keresztmetszeteknél a semleges tengely helyének meghatározását általánosan kétváltozós iterációval végezzük. Kétváltozós iteráció általános alakja:

$$\mathbf{r}^{i+1} = F(\mathbf{r}^i), \quad (6)$$

ahol:

$$F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2.$$

A dolgozatunkban bemutatott eljárás esetén az  $F$  leképezést egymásba ágyazott függvények formájában fogjuk megadni, ugyanis ez leegyszerűsíti az algoritmus lépéseinek szétválasztását. Hét lépésben adjuk meg a leképezést, tehát  $F$  a következő alakban fog megjelenni:

$$F = F_7 \circ F_6 \circ F_5 \circ F_4 \circ F_3 \circ F_2 \circ F_1. \quad (7)$$

Az iteráció  $i$ -edik lépésének *bemenő adata* a semleges tengely  $i$ -edik (közelítő) állapotának  $(X_T^i, Y_T^i)$  globális tengelymetszetei (melyek a (6) egyenletben szereplő  $\mathbf{r}$  vektor komponensei), a dőféspont  $(X_D, Y_D)$  koordinátái, a keresztmetszet kontúrjának  $(X_j, Y_j, j = 1, 2, \dots, N_0)$  töréspontjait tartalmazó  $(2 \times N_0)$  méretű  $\mathbf{K}_0$  mátrix a *globális* koordináta-rendszerben, valamint a vasak súlypontjának koordinátáit és területét tartalmazó  $\mathbf{V}_0$  mátrix és  $n$  értéke, *kimenő adata* pedig a semleges tengely tengelymetszeteinek  $(i + 1)$ -edik  $(X_T^{i+1}, Y_T^{i+1})$  értéke. Az iteráció belső magja a semleges tengely *lokális* koordináta-rendszerben felírt egyenletének együtthatói között teremt kapcsolatot.

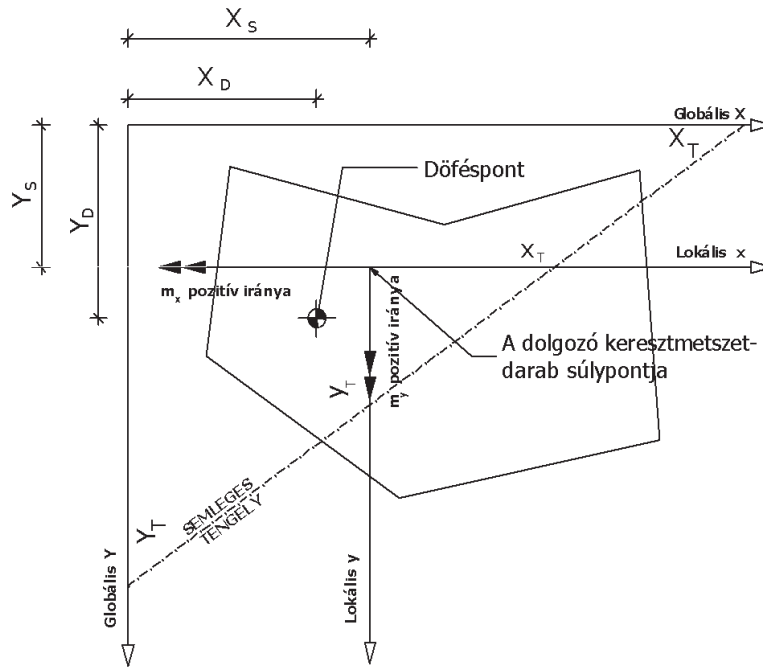
A semleges tengely helyzetével kapcsolatban fontos kérdés, hogy a „kettévágott” keresztmetszet melyik felét tekintjük dolgozó keresztmetszetnek. Ha mindig a semleges tengely ugyanazon oldalán elhelyezkedő darabot választjuk, akkor előfordulhat, hogy nem a dőféspontot tartalmazó részre írjuk föl az egyenleteket, ami szilárdságtani szempontból helytelen. (A feszültségi éktest súlypontja ilyenkor nem eshet egybe a dőfésponttal.) Egyenes külponosság számításánál e diszkusszió elmaradása esetén (Domokos, 1987) kaotikus viselkedést tapasztalunk. Homogén, téglalap keresztmetszet esetén megmutatjuk, hogy ez a különbségtétel lényeges (3. fejezet), az iteráció fixpontjainak számát kettőről egyre csökkenti. *A fentiek alapján a dolgozatban taglalt eljárásnál minden esetben a dőféspontot tartalmazó keresztmetszet-darabot tekintjük dolgozónak.*

### 2.3. AZ ITERÁCIÓ ISMERTETÉSE

A közelítő eljárás leírása az előzőek alapján a következő: tekintsünk egy homogén keresztmetszetet, melyre a  $D(X_D, Y_D)$  pontban egységnyi nyomóerő hat (1. ábra).

Az aktuális semleges tengely helyzetéből (melyet  $X_T^i, Y_T^i$  jellemez) a Weiler–Atherton-algoritmus (Weiler & Atherton, 1977) segítségével, valamint a dolgozó keresztmetszet-részre vonatkozó hipotézisünk alapján meghatározzuk a dolgozó keresztmetszet-rész kontúrjának sarokpontjait tartalmazó  $(2 \times N^i)$  méretű  $\mathbf{K}^i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) mátrixot, ahol  $N^i$  az  $i$ -edik lépésben a dolgozó keresztmetszet darab töréspontjainak száma. (Az algoritmus ismertetése a függelék első részében található.)

$$\mathbf{K}^i = F_1 \left( \begin{bmatrix} X_T^i \\ Y_T^i \end{bmatrix}, \mathbf{K}_0, \mathbf{V}_0, \begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \end{bmatrix} \right). \quad (8)$$



1. ábra

Mivel a  $\mathbf{K}_0$  és  $\mathbf{V}_0$  mátrix, valamint az  $(X_D, Y_D)$  koordináták konstansok, ezért a továbbiakban ezeket, mint független változókat nem tüntetjük fel.

A  $\mathbf{K}^i$  mátrix a bemenő adata a (Petersen, 1982) algoritmusnak, mely alapján a sokszög  $A^i$  területe és súlypontjának globális  $X_S^i, Y_S^i$  koordinátái határozhatók meg az 2. függelékben megadott módon.

$$A^i = F_2(\mathbf{K}^i) = F_2\left(F_1\left(\begin{bmatrix} X_T^i \\ Y_T^i \end{bmatrix}\right)\right), \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} X_S^i \\ Y_S^i \end{bmatrix} = F_3(\mathbf{K}^i, A) = F_3\left(F_1\left(\begin{bmatrix} X_T^i \\ Y_T^i \end{bmatrix}\right), F_2\left(\begin{bmatrix} X_T^i \\ Y_T^i \end{bmatrix}\right)\right). \quad (10)$$

Jelöljük konvenció alapján az  $I$  és  $D$  szimbólumok a keresztmetszet inercia és deviációs nyomatékait (pl.:  $I_x = \int_A y^2 dA$ ). Inhomogén keresztmetszetről lévén szó, a megfelelő mennyiségeken a következő összegeket értjük:

$$\begin{bmatrix} I_x^i \\ I_y^i \\ D_{xy}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{beton,x} + \sum_{j=1}^v I_{vas,x} \\ I_{beton,y} + \sum_{j=1}^v I_{vas,y} \\ D_{beton,xy} + \sum_{j=1}^v D_{vas,xy} \end{bmatrix} = F_4 \left( \mathbf{K}^i, \begin{bmatrix} X_S^i \\ Y_S^i \end{bmatrix} \right) = F_4 \left( F_1 \left( \begin{bmatrix} X_T^i \\ Y_T^i \end{bmatrix} \right), F_3(\mathbf{K}^i, A) \right). \quad (11)$$

A fenti képletekben  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $D_{xy}$  számítását (Petersen, 1982) felhasználásával végezzük, az  $F_4$  függvényt a 2. függelék tartalmazza.

Jelölje  $\mathbf{m}$  az egységnyi erő keltette forgatónyomatékokat a lokális koordináta-rendszerben,  $m_x$  és  $m_y$  pedig legyenek a nyomatékvektor  $x$  és  $y$  tengely irányú komponensei, de  $m_x$ -et  $x$  tengely irányával ellentétesen tekintjük pozitívnak (1. ábra). Az  $m_x$  és  $m_y$  komponenseket az eddigi adatok segítségével meghatározhatjuk:

$$\begin{bmatrix} m_x^i \\ m_y^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_S^i - Y_D \\ X_S^i - X_D \end{bmatrix} = F_5 \left( \begin{bmatrix} X_S^i \\ Y_S^i \end{bmatrix} \right) = F_5(F_3(\mathbf{K}^i)). \quad (12)$$

Ezen jelölések felhasználásával az (1) egyenletben szereplő  $a$  és  $b$  együtthatók a következő vektor egyenletből számíthatóak (Tarnai, 1996):

$$\mathbf{I}\mathbf{u} = \mathbf{m}, \quad (13)$$

ahol<sup>1</sup>:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} D_{xy} & I_x \\ I_y & D_{xy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix}.$$

A (13) egyenletből az  $\mathbf{u}$  vektor kifejezhető:

$$\mathbf{u}^{i+1} = (\mathbf{I}^i)^{-1} \mathbf{m}^i, \quad (14)$$

<sup>1</sup> Az eredeti dolgozat alapján:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} D_{xy} & I_x \\ -I_y & -D_{xy} \end{bmatrix},$$

az eltérés abból adódik, hogy a szerző következetesen balsodrású koordináta-rendszert használ, míg a program egyszerűsítése céljából mi az 1. ábra szerinti irányokban tekintjük pozitívnak a nyomatékokat, ami  $\mathbf{I}$  egyes elemeinek megváltoztatja az előjelét (Becker, 1989).

ezt kifejtve:

$$\begin{bmatrix} a^{i+1} \\ b^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D_{xy}^i}{(D_{xy}^i)^2 - I_x^i I_y^i} & \frac{-I_x^i}{(D_{xy}^i)^2 - I_x^i I_y^i} \\ \frac{-I_y^i}{(D_{xy}^i)^2 - I_x^i I_y^i} & \frac{D_{xy}^i}{(D_{xy}^i)^2 - I_x^i I_y^i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x^i \\ m_y^i \end{bmatrix}, \quad (15)$$

ami a következő alakban is írható:

$$\begin{bmatrix} a^{i+1} \\ b^{i+1} \end{bmatrix} = F_6 \left( \begin{bmatrix} I_x^i \\ I_y^i \\ D_{xy}^i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m_x^i \\ m_y^i \end{bmatrix} \right) = F_6 \left( F_4 \left( \mathbf{K}^i, \begin{bmatrix} X_S^i \\ Y_S^i \end{bmatrix} \right), F_3 \left( \begin{bmatrix} X_S^i \\ Y_S^i \end{bmatrix} \right) \right). \quad (16)$$

Az iterációs ciklusban tehát  $a$  és  $b$  együtthatók kerülnek meghatározásra, de a következő ciklus elkezdéséhez a semleges tengely globális tengelymetszeteire van szükségünk, hiszen a lokális koordináta-rendszer minden iterációs lépésben más-hova kerül. A lokális koordináta-rendszerben vett tengelymetszeteket a (4) és (5) egyenlet alapján kaphatjuk meg. A globális tengelymetszetek pedig a következők:

$$\begin{bmatrix} X_T^{i+1} \\ Y_T^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^{i+1} A^i} + X_S^i \\ \frac{1}{b^{i+1} A^i} + Y_S^i \end{bmatrix} = F_7 \left( \begin{bmatrix} a^{i+1} \\ b^{i+1} \end{bmatrix}, A^i, \begin{bmatrix} X_S^i \\ Y_S^i \end{bmatrix} \right) = F_7 \left( F_6 \left( \begin{bmatrix} I_x^i \\ I_y^i \\ D_{xy}^i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m_x^i \\ m_y^i \end{bmatrix} \right), F_2(\mathbf{K}^i), F_3(\mathbf{K}^i, A) \right) \quad (17)$$

Mivel mind  $a$ , mind  $b$  lehet 0, vagy tarthat 0-hoz vagy végtelenhez (a semleges tengely párhuzamos valamelyik koordinátatengellyel), az iteráció vizsgálatára írt programokban ezek az esetek külön diszkussziót igényelnek, hiszen matematikailag itt szingularitás lép fel, ugyanakkor a semleges tengely szempontjából ez bármelyik másik helyzettel egyenértékű esetnek tekinthető.

Programjainkban a szingularitás kiszűrését kétféleképpen oldottuk meg. A Basic nyelven írt program a semleges tengely meredekségét vizsgálja, a C nyelvű program (15) egyenlet megoldásaként kapott  $a, b$  értékeket diszkutálja.

Összefoglalva az algoritmust, az iteráció egy önkényesen felvett semleges tengellyel kezdődik, vagyis egy szabadon választott  $X_T^1, Y_T^1$  értékekkel. A következő lépések útján jutunk el az új semleges tengelyt jellemző  $X_T^i, Y_T^i$  értékekhez (a lépések alá írt számok a vonatkozó egyenletekre utalnak):



$$\begin{array}{cccccccc} & & F_1, & F_2, F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 \\ \left[ \begin{array}{c} X_T^i \\ Y_T^i \end{array} \right], \mathbf{K}_0, \mathbf{V}_0, \left[ \begin{array}{c} X_D \\ Y_D \end{array} \right] & \rightarrow & \mathbf{K}^i & \rightarrow & A, \left[ \begin{array}{c} X_S^i \\ Y_S^i \end{array} \right] & \rightarrow & \left[ \begin{array}{c} I_x \\ I_y \\ D_{xy} \end{array} \right] & \rightarrow & \left[ \begin{array}{c} m_x^i \\ m_y^i \end{array} \right] & \rightarrow & \left[ \begin{array}{c} a^{i+1} \\ b^{i+1} \end{array} \right] & \rightarrow & \left[ \begin{array}{c} X_T^{i+1} \\ Y_T^{i+1} \end{array} \right] \end{array} \quad (18)$$

$$(8) \quad (9), (10) \quad (11) \quad (12) \quad (16) \quad (17)$$

vagyis

$$\left[ \begin{array}{c} X_T^{i+1} \\ Y_T^{i+1} \end{array} \right] = F \left( \left[ \begin{array}{c} X_T^i \\ Y_T^i \end{array} \right] \right), \quad (19)$$

ahol  $F$  a (7) egyenlettel megadott összetett függvény.

Alapvető kérdésünk, hogy az ismertett iteráció konvergens-e. A konvergencia eldöntése matematikailag a Cauchy-féle konvergencia-kritériummal lehetséges: egy  $(a_n)$  sorozat pontosan akkor konvergens, ha minden  $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ -hoz létezik egy  $n_0 \in \mathbf{N}$  úgy, hogy minden  $n, m \geq n_0$ -ra teljesül:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon. \quad (20)$$

Az általunk numerikusan ellenőrzött kritérium:

$$|a_n - a_{n-1}| < \varepsilon. \quad (21)$$

Ez természetesen gyengébb, mint a Cauchy-féle kritérium, azonban az numerikusan aligha ellenőrizhető.

### 3. KONVERGENCIA VIZSGÁLATA HOMOGEN TÉGLALAP KERESZTMETSZET ESETÉN

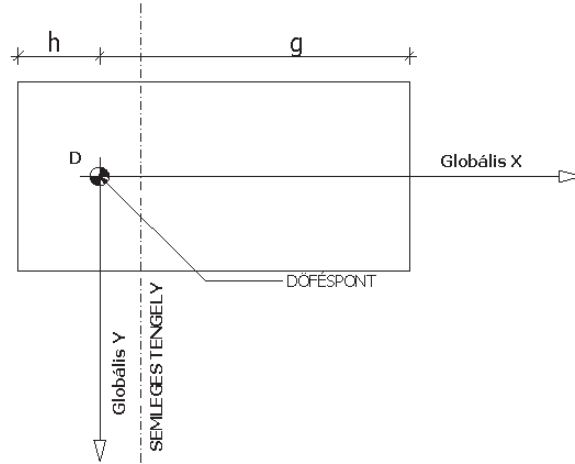
#### 3.1. A PROBLÉMA LEÍRÁSA, JELÖLÉSEK

Tekintsünk egy téglalap alakú, homogén keresztmetszetet (2. ábra). A keresztmetszetre a  $D$  pontban nyomóerő hat, ahol  $D$  rajta van az egyik súlyponti főtengelyen. Az iteráció csak egyváltozós, ha az iteráció kezdetül felvett semleges tengely merőleges a jelzett szimmetriatengelyre. Esetünkben ez  $Y$  tengely, így  $Y_T^1 = Y_T^2 = \dots = Y_T^i = \infty$ , és a szimmetria miatt helye az iteráció folyamán mindig a végtelenben marad. Egyváltozós iteráció általános alakja:

$$x^i = f(x^{i-1}). \quad (22)$$

A 2. ábra alapján a dőféspont és a téglalap közelebbi oldalának távolságát jelöljük  $h$ -val, a távolabbi oldalát  $g$ -vel. A globális koordináta-rendszer origója az erő dőféspontja. Feltesszük továbbá, hogy  $g > 2h$ , ez nem más, mint a kis külpontosság esetének kizárása.

Először megmutatjuk, hogy az előző fejezetben levezetett egyenletekből az egyváltozós eset egyenlete milyen módon származik.



2. ábra

Mivel  $X$  szimmetriatengely,

$$D_{xy} = 0. \quad (23)$$

A globális koordináta-rendszer a dőféspontban van, tehát:

$$X_D = 0, \quad (24)$$

$$Y_D = 0. \quad (25)$$

Ezek alapján a (16) egyenlet (12) felhasználásával a következőképpen alakul:

$$\begin{bmatrix} a^i \\ b^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-I_x^{i-1}}{0 - I_x^{i-1} I_y^{i-1}} \\ \frac{-I_y^{i-1}}{0 - I_x^{i-1} I_y^{i-1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_S^{i-1} - 0 \\ X_S^{i-1} - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_S^{i-1}}{I_y^{i-1}} \\ \frac{Y_S^{i-1}}{I_x^{i-1}} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

(17) és (26) egyenlet alapján:

$$\begin{bmatrix} X_T^i \\ Y_T^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^i A^{i-1}} + X_S^{i-1} \\ \frac{1}{b^i A^{i-1}} + Y_S^{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_y^{i-1}}{X_S^{i-1} A^{i-1}} + X_S^{i-1} \\ \frac{I_x^{i-1}}{Y_S^{i-1} A^{i-1}} + Y_S^{i-1} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Figyelembe véve, hogy feltevésünkkel egyezően  $Y_T^i = \infty$ , a kétváltozós iteráció egyváltozóssá válik. Ez következik abból is, hogy nyilvánvalóan  $Y_S^{i-1} = 0$ . Az ábra jelöléseit és a téglalap inerciájára, súlypontjára és területére vonatkozó ismert összefüggéseket, illetve algebrai átalakításokat használva (27)-ből a következő egyenletre jutunk:

$$X_T^i = \frac{I_y^{i-1}}{X_S^{i-1} A} + X_S^{i-1} = \frac{\frac{b(X+h)^3}{12}}{\left(\frac{X+h}{2} - h\right) b(X+h)} + \left(\frac{X+h}{2} - h\right) = \frac{1}{3} \frac{(X^3 + h^3)}{(X^2 - h^2)}. \quad (28)$$

Szorozzuk meg a jobb oldalon álló kifejezés számlálóját és nevezőjét egyaránt a keresztmetszet  $A$  területével. Az így kapott kifejezés nem más, mint a Pelikán-féle iterációs eljárás a semleges tengely meghatározására egyenes külpontosság esetében. (A 3. függelékben megadjuk a Pelikán-féle iterációs eljárás kiterjesztését ferde külpontosság esetére.)

Az iteráló eljárás függvénye tehát a következő alakban írható (Domokos, 1987):

$$f(x) = \frac{I_y}{S_y} = \frac{\frac{A}{3}(X^3 + h^3)}{\frac{A}{2}(X^2 - h^2)}, \quad (29)$$

ahol  $I_y$  a dolgozó keresztmetszet inerciája,  $S_y$  a dolgozó keresztmetszet statikai nyomatéka a dőfésponi tengelyre (Pelikán, 1972).

A továbbiakban a (29) egyenletben szereplő egyváltozós iteráció konvergencia-tulajdonságait vizsgáljuk.

Ha figyelembe vesszük, hogy mindig a semleges tengely dőféspon felőli oldala dolgozik, akkor a függvénynek két tartománya lesz, hiszen ha az iteráció során a semleges tengely átkerül a dőféspon másik oldalára, akkor a keresztmetszet másik

oldala fog dolgozni.  $f(X)$  felírásánál figyelembe vesszük a keresztmetszet határait is, vagyis összesen négy tartományt különböztetünk meg.

$f(X)$  teljes alakja:

$X \in (g, \infty]$

$$f(X) = \frac{\frac{A}{3}(g^3 + h^3)}{\frac{A}{2}(g^2 - h^2)} = \text{const.} \quad (30)$$

$X \in [0, g]$

$$f(X) = \frac{I_y}{S_y} = \frac{\frac{A}{3}(X^3 + h^3)}{\frac{A}{2}(X^2 - h^2)} \quad (31)$$

$X \in [-h, 0)$

$$f(X) = \frac{I_y}{S_y} = \frac{\frac{A}{3}((-X)^3 + g^3)}{\frac{A}{2}(g^2 - (-X)^2)} \quad (32)$$

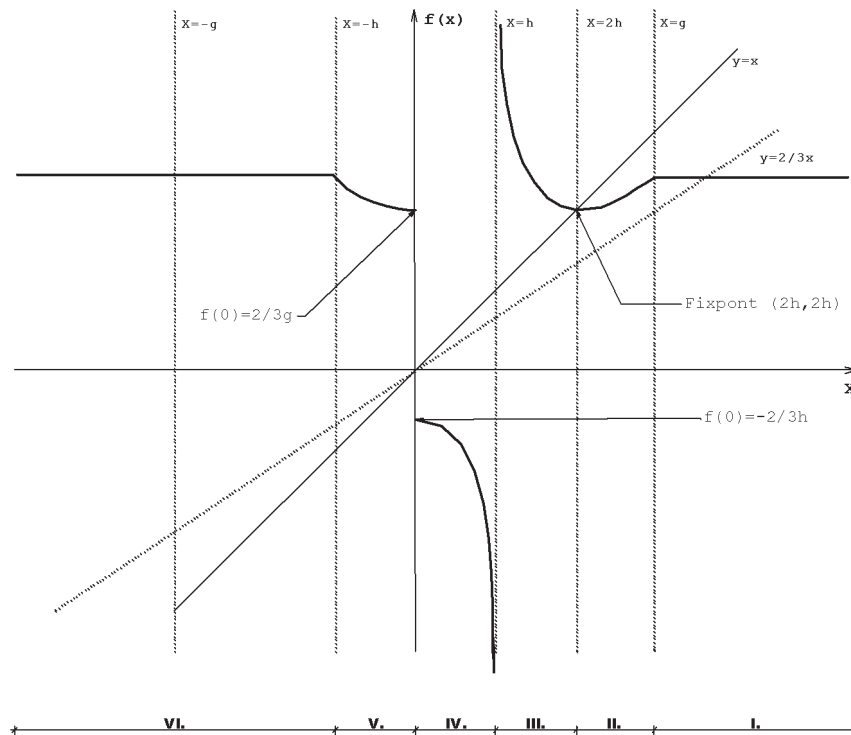
$X \in [-\infty, -h)$

$$f(X) = \frac{I_y}{S_y} = \frac{\frac{A}{3}(h^3 + g^3)}{\frac{A}{2}(g^2 - h^2)} = \text{const.} \quad (33)$$

### 3.2. F(X) FÜGGVÉNY TULAJDONSÁGAI, VIZSGÁLATA

A függvényvizsgálat eredményei (3. ábra):

- $X = h$  és  $X = 0$  helyen a függvénynek szakadása van.

3. ábra.  $f(X)$  függvény menete

- $X = 0$ -nál maximum, minimum,  $X = 2h$ , helyen pedig minimum van;  
 $f(0)^+ = -2/3h$ ,  
 $f(0)^- = -2/3g$ ,  
 $f(2h) = 2h$ .
- Aszimptóta:  $X = h$
- $X = f(X)$  egyenlet gyöke:  $X_1 = 2h$ , vagyis az iterációnak csak egy fixpontja van.

### 3.3. KONVERGENCIA BIZONYÍTÁSA

A bizonyításban tartományokra osztjuk a függvény értelmezési tartományát, a konvergenciát a fixpont vonzáskörzetére látjuk be (Domokos, 1987), és bebizonyítjuk, hogy az értelmezési tartomány többi részéből indítva az iterációt, véges számú lépésben a fixpont környezetébe jutunk.

- **I.**  $X \in (g, \infty]$   
 $f(X) = \text{const.} > 2h$ , ebből a tartományból az iteráció az első lépésben a  $[2h, g]$  tartományba kerül.
- **II.**  $X \in [2h, g]$   
(Domokos, 1987) bizonyítása külpontos nyomásra éppen erről a tartományról állítja, hogy az iteráció a  $(2h, 2h)$  fixponthoz konvergál, a tartományt nem hagyhatja el.
- **III.**  $X \in (h, 2h)$   
Innen indítva  $x^i$  második értéke már az  $X > 2h$  tartományba esik, hiszen a függvény minimuma  $X = 2h$  helyen  $2h$ . Vagyis a második lépéstől az **I.** vagy **II.** tartományra mondottak igazak, ebben az intervallumban az iterációval nyert sorozatnak legfeljebb egy eleme lehet.
- **IV.**  $X \in [0, h)$   
Ebben a tartományban a függvény szigorúan monoton csökken, maximuma az  $x = 0$  helyen  $-2/3h$  értékű. Vegyük észre, hogy a függvény értékkészlete a minimumok – maximumok alapján:  $[-\infty, -2/3h] \cup [2/3g, +\infty]$ , vagyis az iteráció során az  $X$  soha nem kerülhet az  $[-2/3h, 2/3g]$  tartományba, vagyis a  $[0, h]$  intervallumból csak akkor indul iteráció, ha  $X$ -t első lépésben ide vesszük fel. Ez azért fontos, mert így válik biztossá, hogy nem alakul ki össziláció az iteráció folyamán.  
Mivel a függvény ezen a tartományon mindenhol negatív, biztos, hogy  $X^i < 0$ , ha  $i = 2$ .  
Ebben az intervallumban tehát az iterációból képzett sorozatnak legfeljebb egy eleme lehet, az is kizárólag a kiindulási érték.
- **V.**  $X \in [-h, 0)$   
Ezen a tartományon  $f(X)$  szigorúan monoton csökken, minimuma  $X \rightarrow 0$  esetén  $f(X) \rightarrow -2/3g$ . Az iteráció ebből a tartományból azonnal a pozitív oldalra kerül, mégpedig mivel  $g > 2h$ , biztos, hogy,  $X^{i+1} > h$ , ha  $X^i \in [-h, 0)$ .
- **VI.**  $X \in [-\infty, -h]$   
Ebben a tartományban  $f(X)$  konstans, értéke pozitív, vagyis az iteráció egy lépésben a  $[h, \infty]$  intervallumba kerül át.

Összefoglalva a  $[2h, g]$  tartomány kivételével minden tartományban legfeljebb egy lépés lehet, ez azt jelenti, hogy a legrosszabb esetben is  $([0, h] \rightarrow [-h, 0] \rightarrow [h, 2h] \rightarrow [2h, \infty])$  3 lépésen belül az iteráció bekerül abba a tartományba, amelyben szigorúan konvergens.

#### 4. A SEMLEGES TENGELY HELYÉNEK MEGHATÁROZÁSÁRA ÍRT PROGRAMOK MŰKÖDÉSE

Munkánk során két program született a probléma vizsgálatára. Az egyiket Basic nyelven, a másikat C nyelven írtuk. Alapvető különbség köztük, hogy másképp kezelik a már említett szinguláris eseteket (egyenes külpontosság), és hogy a C nyelven írt program a Weiler–Atherton-algoritmusként (Weiler & Atherton, 1977) ismert poligonaraboló módszerrel tetszőleges oldalszámú és belső szögű keresztmetszeteket old meg.

Az eltérő nyelvi szintaxis és implementáció ellenére a két program ugyanazokra az eredményekre vezetett: próbálkozásaink során minden kiinduló értékből konvergens viselkedést tapasztaltunk.

A vizsgálatok elvégzésére külön algoritmus szolgált, mely megadott intervallumon változtatta a kiválasztott változót és a semleges tengely helyét. Általunk megadott lépésszám után, adott határral vizsgálta, hogy az egymást követő iterációs lépések között van-e ciklikus, vagy pedig adott határnál kisebb az eltérés, amit a konvergencia numerikus igazolásának tekintettünk.

#### 5. EREDMÉNYEK

Dolgozatunkban bemutattunk egy új, direkt rekurzió alapuló eljárást, mely alkalmas berepedt, rugalmas vasbeton keresztmetszetek számítására. Módszerünk az egyváltozós esetre javasolt Pelikán-módszer kétváltozós analógiájának tekinthető. Eljárásunk kiemelkedően jó konvergencia-tulajdonságokat mutat: egyváltozós esetben, beton keresztmetszetenél bizonyítottuk a globális konvergenciát, a kétváltozós, vasalt keresztmetszetenél ugyanezt numerikus szimulációval támasztottuk alá.

Könnyű programozhatósága és robusztus konvergencia-tulajdonságai miatt módszerünk egy ferdén külpontosan nyomott, illetve aszimmetrikusan feszített tartók elmozdulásait számító program magjaként is szolgálhat.

#### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A szerzők köszönik Gáspár Zsolt észrevételeit, melyek figyelembevétele sokat javított a dolgozaton. Szalay Zsuzsa sokat segített a szakirodalom értékelésében. A kutatást az OTKA T031744 (DG), T029271 (SAÁ, JKP) és az FKFP 0177/2001 (DG) számú témája valamint a Bolyai Kutatási Ösztöndíj (DG), valamint az Alkalmazott Matematika és Számítógépes Fizikai Központ Projekt támogatta.

## FÜGGELÉK

### 1. A WEILER-ATHERTON ALGORITMUS ELVE

Egy  $N_0$  oldalú (nem feltétlenül konvex) sokszöget egy általános helyzetű  $e$  egyenes metsz ketté. Az  $e$  egyenest két, a sokszögön kívüli pontjával adjuk meg, egyenletét paraméteres alakban adjuk meg, ahol a paraméter értéke a  $[0, 1]$  intervallumon lehet, a szakasz kezdőpontjában 0, végpontjában pedig 1 az értéke. Metszéspontok keresése esetében az  $e$  egyenes egyenletei egy másik, paraméteres alakban felírt szakasz egyenleteivel együtt egyenletrendszert alkotnak. A paraméterekre nézve, vagy létezik 0 és 1 közötti megoldás, és ezen paraméter használatával a metszéspont meghatározható, vagy nincs megoldás a  $[0, 1]$  intervallumon, ami azt jelenti, hogy az adott szakasz hosszában nincs metszéspont.

Az eredeti sokszög csúcseinak koordinátáit a  $(2 \times N_0)$  méretű  $\mathbf{K}_0$  mátrix tartalmazza, körbejárás szerinti sorrendben. A metszéssel keletkező, megtartásra kerülő sokszög oldalainak száma legyen  $N^i$ , (értelemszerűen  $3 \leq N^i \leq (N_0 + 1)$ ), a  $(2 \times N^i)$  méretű  $\mathbf{K}^i$  mátrix tartalmazza a kimetszett alakzat sarokpontjait, körbejárás szerinti sorrendben. A  $\mathbf{K}^i$  mátrixot  $\mathbf{K}_0$  mátrix megfelelő sorainak kiválasztásával és a semleges tengely, valamint a kontúr metszéspontjait tartalmazó újabb sorok beiktatásával kapjuk. A Weiler–Atherton algoritmus ezt az átalakítást végzi, tetszőleges (nem feltétlenül konvex) sokszögek esetén.

Az eljárás lényege a következő: a sarokpontokat egy tetszőleges, nem az  $e$  egyenesbe eső ponttal összekötjük (esetünkben ez a dőféspont  $(X_D, Y_D)$ ), és megvizsgáljuk, hogy az  $e$  egyenesnek van-e metszéspontja ezzel a szakasszal. Ha van, akkor a szakaszhoz tartozó sarokpontot *belsőnek* nevezzük, ha nincs, akkor *külsőnek*. Újra sorba véve  $\mathbf{K}_0$  mátrix elemeit, a következő szabály szerint járunk el (az  $N^i$ -edik pont után következő pont nem más, mint 1. pont):

- ha egy pont és az utána következő is *belső*, akkor az első pont koordinátáit beírjuk  $\mathbf{K}^i$  mátrix következő üres sorába,
- ha egy pont *belső* és az azt követő *külső*, akkor köztük a sokszögnek és az  $e$  egyenesnek metszése van. Képezzük ezt a metszéspontot és először a pontot, majd a metszéspontot írjuk  $\mathbf{K}^i$  mátrix következő üres soraiba,
- ha egy pont és az utána következő is *külső*, akkor továbblépünk a következő pont vizsgálatára,
- ha egy pont *külső* és az azt követő *belső*, akkor köztük a sokszögnek és az  $e$  egyenesnek metszése van. Képezzük ezt a metszéspontot és ezt írjuk  $\mathbf{K}^i$  mátrix következő üres sorába.

$\mathbf{K}_0$  mátrix összes sorának vizsgálata után  $\mathbf{K}^i$  mátrixot kapjuk, mely csak a kimetszett, esetleg nem összefüggő sokszögdarab(ok) csúcspontjait tartalmazza.

### 2. N OLDALÚ SOKSZÖG KERESZTMETSZET JELLEMZŐINEK SZÁMÍTÁSA

Mivel az iteráció során keletkező keresztmetszet-darabok  $3, 4, \dots, N$  oldalúak lehetnek, szükséges egy olyan eljárás, mely bármely esetben megadja a vizsgált sokszög területét, súlypontját, inercia- és deviációs nyomatékait. Számításainkat (Petersen, 1982) alapján végezzük, az ott szereplő levezetést kiterjesztjük inhomogén keresztmetszetekre, vagyis esetünkben  $v_h$ , illetve  $v_n$  db általános helyzetű, különböző keresztmetszetű húzott, illetve nyomott vas is található a keresztmetszetben.



A következő egyenletek bármely szabadon választott koordináta-rendszerben igazak, mi azonban az egyszerűség kedvéért a globális XY koordináta-rendszert fogjuk használni.  $X_j, Y_j$ , a sokszög  $j$ -edik csúcspontjának koordinátái ( $j = 1, 2, \dots, N^i$ ), továbbá  $X_{N^i+1} = X_1, Y_{N^i+1} = Y_1$ .

- A teljes keresztmetszet területe (ami nem más, mint  $F_2$  függvény)

$$A = F_2(\mathbf{K}^i) = A_{beton} + A_{vas} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N^i} (X_j Y_{j+1} - X_{j+1} Y_j) + n \sum_{j=1}^{v_h} A_{vas,j} + (n-1) \sum_{j=1}^{v_n} \bar{A}_{vas,j}. \quad (34)$$

- A teljes keresztmetszet súlypontjának koordinátái (egyben  $F_3$  függvény):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \end{bmatrix} &= F_3(\mathbf{K}^i, A) = \\ &= \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{N^i} (X_j Y_{j+1} - X_{j+1} Y_j) \cdot (Y_j + Y_{j+1}) \\ \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{N^i} (X_j Y_{j+1} - X_{j+1} Y_j) \cdot (X_j + X_{j+1}) \end{bmatrix} + n \sum_{j=1}^{v_h} A_{vas,j} X_{vas,j} + (n-1) \sum_{j=1}^{v_n} \bar{A}_{vas,j} \bar{X}_{vas,j}}{A} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{N^i} (X_j Y_{j+1} - X_{j+1} Y_j) \cdot (Y_j + Y_{j+1}) \\ \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{N^i} (X_j Y_{j+1} - X_{j+1} Y_j) \cdot (X_j + X_{j+1}) \end{bmatrix} + n \sum_{j=1}^{v_h} A_{vas,j} Y_{vas,j} + (n-1) \sum_{j=1}^{v_n} \bar{A}_{vas,j} \bar{Y}_{vas,j}}{A}. \end{aligned} \quad (35)$$

- A teljes keresztmetszet inercianyomatékai, úgy, hogy a vas saját inerciáját elhanyagoljuk, csak a Steiner-tagot vesszük figyelembe ( $F_4$ ):

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{N^i} (X_j Y_{j+1} - X_{j+1} Y_j) \cdot [(Y_j + Y_{j+1})^2 - Y_j Y_{j+1}] - A_{beton} (Y_S)^2 + n \sum_{j=1}^{v_h} A_{vas,j} (Y_{vas,j} - Y_S)^2 + \\ &+ (n-1) \sum_{j=1}^{v_n} \bar{A}_{vas,j} (\bar{Y}_{vas,j} - Y_S)^2, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{N^i} (X_j Y_{j+1} - X_{j+1} Y_j) \cdot [(X_j + X_{j+1})^2 - X_j X_{j+1}] - A_{beton} (X_S)^2 + n \sum_{j=1}^{v_h} A_{vas,j} (X_{vas,j} - X_S)^2 + \\ &+ (n-1) \sum_{j=1}^{v_n} \bar{A}_{vas,j} (\bar{X}_{vas,j} - X_S)^2. \end{aligned} \quad (37)$$

- A keresztmetszet  $D_{xy}$  deviációs nyomatéka ( $F_4$ ):

$$\begin{aligned} D_{xy} &= \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{N^i} (X_j Y_{j+1} - X_{j+1} Y_j) \cdot [(X_j + X_{j+1})(Y_j + Y_{j+1}) - \frac{1}{2}(X_j Y_{j+1} + X_{j+1} Y_j)] - A_{beton} X_S Y_S + \\ &+ n \sum_{j=1}^{v_h} A_{vas,j} (X_{vas,j} - X_S)(Y_{vas,j} - Y_S) + (n-1) \sum_{j=1}^{v_n} \bar{A}_{vas,j} (\bar{X}_{vas,j} - X_S)(\bar{Y}_{vas,j} - Y_S). \end{aligned} \quad (37)$$

### 3. A PELIKÁN-FÉLE ITERÁCIÓS ELJÁRÁS KITERJESZTÉSE FERDE KÜLPONTOSSÁG ESETÉRE

Legyen a globális koordináta-rendszer origója a dőféspontban! ( $X_D = 0, Y_D = 0$ ) Jelölje  $S_x$  és  $S_y$  a keresztmetszet statikai nyomatékát a megfelelő globális tengelyekre. A súlypontra vonatkozó ismert összefüggések és (12) alapján:

$$\begin{bmatrix} m_x^i \\ m_y^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_S^i - Y_D \\ X_S^i - X_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_S^i \\ X_S^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{S_x^i}{A^i} \\ \frac{S_y^i}{A^i} \end{bmatrix}. \quad (42)$$

A (17) egyenlet (15) és (47) felhasználásával a következő alakot ölti:

$$\begin{bmatrix} X_T^i \\ Y_T^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^i A^{i-1}} + X_S^{i-1} \\ \frac{1}{b^i A^{i-1}} + Y_S^{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(D_{xy}^{i-1})^2 - I_x^{i-1} I_y^{i-1}}{(D_{xy}^{i-1} Y_S^{i-1} - I_x^{i-1} X_S^{i-1}) A^{i-1}} + X_S^{i-1} \\ \frac{(D_{xy}^{i-1})^2 - I_x^{i-1} I_y^{i-1}}{(D_{xy}^{i-1} X_S^{i-1} - I_y^{i-1} Y_S^{i-1}) A^{i-1}} + Y_S^{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(D_{xy}^{i-1})^2 - I_x^{i-1} I_y^{i-1}}{(D_{xy}^{i-1} S_x^{i-1} - I_x^{i-1} S_y^{i-1})} + \frac{S_y^{i-1}}{A^{i-1}} \\ \frac{(D_{xy}^{i-1})^2 - I_x^{i-1} I_y^{i-1}}{(D_{xy}^{i-1} S_y^{i-1} - I_y^{i-1} S_x^{i-1})} + \frac{S_x^{i-1}}{A^{i-1}} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Közös nevezőre hozva:

$$\begin{bmatrix} X_T^i \\ Y_T^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D_{xy}^{i-1} (A^{i-1} D_{xy}^{i-1} + S_x^{i-1} S_y^{i-1}) - I_x^{i-1} (A^{i-1} I_y^{i-1} + (S_y^{i-1})^2)}{(D_{xy}^{i-1} S_x^{i-1} - I_x^{i-1} S_y^{i-1}) A^{i-1}} \\ \frac{D_{xy}^{i-1} (A^{i-1} D_{xy}^{i-1} + S_x^{i-1} S_y^{i-1}) - I_y^{i-1} (A^{i-1} I_x^{i-1} + (S_x^{i-1})^2)}{(D_{xy}^{i-1} S_y^{i-1} - I_y^{i-1} S_x^{i-1}) A^{i-1}} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Vizsgáljuk meg, hogy a globális koordináta-rendszerben mekkorák az inercia és deviációs nyomatékok. Ezeket jelölje rendre  $I_{x,D}$ ,  $I_{y,D}$  és  $D_{xy,D}$ .

$$I_{x,D} = I_x + A(Y_S)^2 = I_x + A \left( \frac{S_x}{A} \right)^2 = \frac{I_x A + (S_x)^2}{A} \quad (45)$$

$$I_{y,D} = I_y + A(X_S)^2 = I_y + A \left( \frac{S_y}{A} \right)^2 = \frac{I_y A + (S_y)^2}{A} \quad (46)$$

$$D_{xy,D} = D_{xy} + A Y_S X_S = D_{xy} + A \left( \frac{S_x}{A} \right) \left( \frac{S_y}{A} \right) = \frac{D_{xy} A + S_x S_y}{A} \quad (47)$$

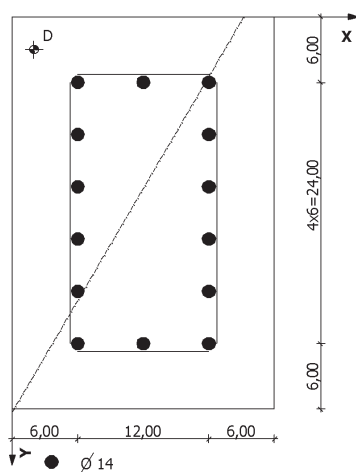
(45) – (47) egyenletek segítségével (44) a következő alakra egyszerűsödik, mely az egyenes külpontosság eseteiben a megfelelő Pelikán-képletet adja vissza:

$$\begin{bmatrix} X_T^i \\ Y_T^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xy}^{i-1} D_{xy,D}^{i-1} - I_x^{i-1} I_{y,D}^{i-1} \\ D_{xy}^{i-1} S_x^{i-1} - I_x^{i-1} S_y^{i-1} \\ D_{xy}^{i-1} D_{xy,D}^{i-1} - I_y^{i-1} I_{x,D}^{i-1} \\ D_{xy}^{i-1} S_y^{i-1} - I_y^{i-1} S_x^{i-1} \end{bmatrix} \quad (48)$$

## 4. PÉLDÁK

Ebben a függelékben szakirodalomból merített példákkal hasonlítjuk össze számítási módszereket. Minden esetben közöljük az általunk számított egyensúlyi  $X_T, Y_T$  tengelymetszeteket valamint zárójelben megadjuk az eredeti, hivatkozott műben szereplő eredményt is. Eljárásunk minden esetben 5 lépésen belül 1%-os relatív hibahatáron belülre került. Elsőként (Yen, 1991) cikkének példái-ból mutatunk be hármat, itt  $n=20$  értékkel számoltunk. Itt, valamint a 4. példánál a nyomott vasakat is  $n$ -szeres szorzóval vettük figyelembe. Yen képlékeny feszültségeloszlást feltételezett (itt tehát  $n$  értéke nem értelmezhető), ez magyarázza a kisebb eltéréseket.

1. PÉLDA – szimmetrikusan vasalt, négyszög keresztmetszetű pillér ferde hajlításra (Yen, 1991)



24×36 cm-es vasbeton pillér

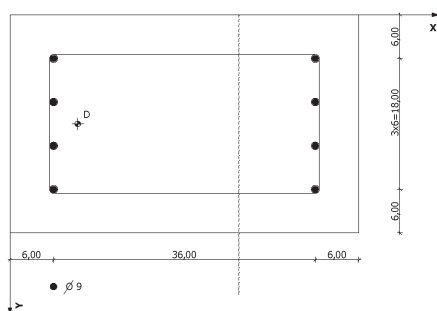
$X_D = 2$  cm  
 $Y_D = 3$  cm.

Vasalás: 14 db Ø 14-es vas az adott elrendezés szerint.

*Eredmények:*

$X_T = 21,19$  cm (20,91 cm)  
 $Y_T = 36,40$  cm (36,31 cm)

2. PÉLDA – szimmetrikusan vasalt, négyzet keresztmetszetű pillér egyenes hajlításra (Yen, 1991)



48×30 cm-es vasbeton pillér,

$$X_D = 9,32 \text{ cm}$$

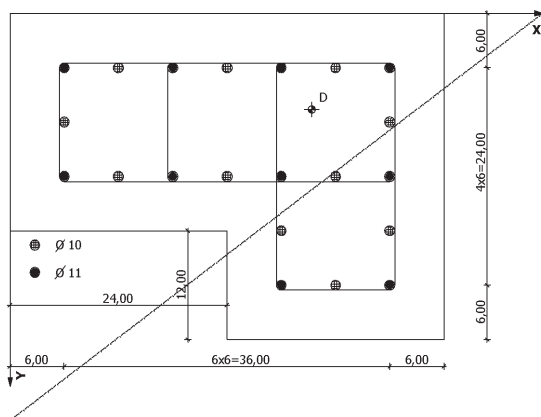
$$Y_D = 15 \text{ cm.}$$

Vasalás: 8 db  $\varnothing 9$ -es vas az adott elrendezés szerint.

*Eredmények:*

$$X_T = 31,49 \text{ cm} \quad (32,73 \text{ cm})$$

3. PÉLDA – L alakú pillér ferde hajlításra (Yen, 1991)



48×36 cm-es vasbeton pillér, bal alsó sarkában 24×12 cm-es kihagyással

$$X_D = 33,4 \text{ cm}$$

$$Y_D = 10,6 \text{ cm.}$$

Vasalás: 10 db  $\varnothing 11 + 11 \varnothing 10$ -es vas az adott elrendezés szerint.

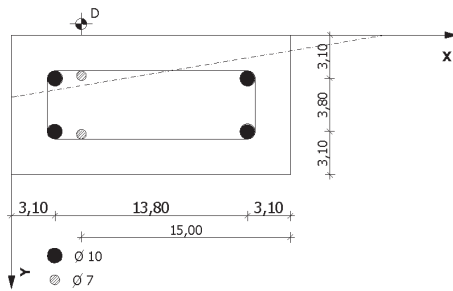
*Eredmények:*

$$X_T = 58,90 \text{ cm} \quad (54,68 \text{ cm})$$

$$Y_T = 44,96 \text{ cm} \quad (40,54 \text{ cm})$$

Negyedik példánk egy tiszta hajlításra igénybe vett feszített vasbeton gerenda, itt is  $n = 4$  értékkel számoltunk (Rodríguez-Gutierrez – Aristizábal-Ochoa, 2000). Rodríguez-Gutierrez is harmadik feszültségi állapotra oldotta meg a feladatot.

4. PÉLDA – négyszög keresztmetszetű, feszített vasbeton gerenda szimmetri-kus hajlításra (Rodríguez-Gutierrez – Aristizábal-Ochoa, 2000)



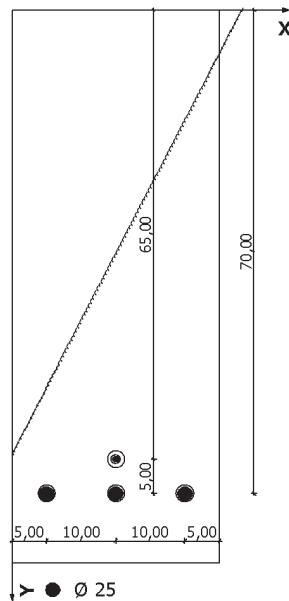
10×20 cm-es vasbeton gerenda  
 Határnyomaték (mért érték): 692,26 kNcm,  
 feszítőerő: 119,35 kN, így:  
 $X_D = 5$  cm  
 $Y_D = -0,79$  cm.  
 Vasalás: 4 db Ø 10-es vas és 2 db Ø 7-es feszítőpászma az adott elrendezés szerint.

*Eredmények:*

$X_T = 31,47$  cm (26,74 cm, mért)  
 $Y_T = 4,91$  cm (4,44 cm, mért)

Utolsó példánk a módszerünkhöz legközelebb álló, második feszültségi állapotot vizsgáló eljárással vizsgált eseteket mutatják be. (Brøndum-Nielsen, 1980, 1986) Itt – az eredeti cikkekhez hasonlóan –  $n = 20$  értékkel számoltunk, és azt tapasztaltuk, hogy eredményeink akkor egyeznek meg teljesen az irodalomban található értékekkel, ha a vasakat a nyomott zónában is  $n$ -szeres területtel vesszük figyelembe. Ha itt  $(n-1)$ -szeres szorzót alkalmaztunk, akkor mintegy 1%-os eltérést tapasztalhattunk.

5. PÉLDA – négyszög keresztmetszetű, feszített vasbeton gerenda tiszta hajlításra (Brøndum-Nielsen, 1980)



30×80 cm-es vasbeton gerenda  
 $P = 251$  kN,  $M_x = 300$  kNm,  $M_y = 50$  kNm,  
 így:

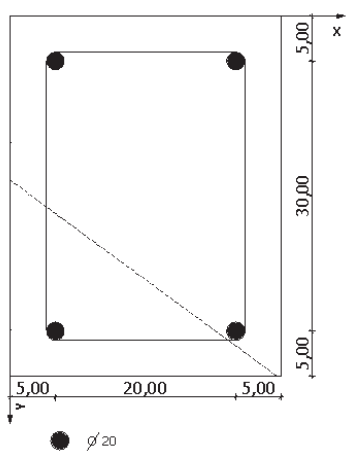
$X_D = -4,92$  cm  
 $Y_D = -54,5$  cm.

Vasalás: 3 db Ø 25-ös vas és 1 db 5 cm<sup>2</sup>-es feszítőpászma az adott elrendezés szerint

*Eredmények:*

$X_T = 32,80$  cm (33,17 cm)  
 $Y_T = 64,90$  cm (64,25 cm)

6. PÉLDA – négyszög keresztmetszetű, vasbeton gerenda tiszta hajlításra (Brøndum-Nielsen, 1986)



30x40 cm-es vasbeton gerenda  
 $M_x=20$  kNm,  $M_y= 8$  kNm, így:

Vasalás: 4 db  $\varnothing 20$ -as vas az adott elrendezés szerint

Eredmények:

$X_T = -24,8$  cm      (-24,8 cm)  
 $Y_T = 18,3$  cm      (18,3 cm)

## HIVATKOZÁSOK

- Becker Sándor (1989): *Szilárdságtan I.* Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó.
- Brøndum-Nielsen, Troels (1980): Stress Analysis of Cracked Arbitrary Concrete Section Under Service Load. *ACI Journal, Proceedings* Vol. 77, No. 6, Nov.–Dec., 458–468.
- Brøndum-Nielsen, Troels (1984): Serviceability Limit State Analysis of Concrete Sections Under Biaxial Bending. *ACI Journal, Proceedings* Vol. 81, No. 5, Sept.–Oct., 448–455.
- Brøndum-Nielsen, Troels (1986): Serviceability Limit State Analysis of Cracked, Polygonal Concrete Sections Under Biaxial or Symmetric Bending. *ACI Journal, Proceedings* Vol. 83, No. 2, Mar.–Apr., 209–218.
- Cosenza, Eduardo and Debenardi, Pier Giorgio (1997): Calculation of Stresses, Deformations and Deflections of Reinforced and Prestressed Concrete Elements in Service. *CEB Bulletin* 235 „Serviceability models” Progress Report, 105–142.
- Domokos Gábor (1987): Axiálisan terhelt vasbeton keresztmetszet semleges tengelyének számítása konvergens iterációval a II. feszültségi állapotban. *Építés-Építészettudomány* XIX. 3–4., 395–405 (1987/88).
- Pelikán József (1972): *Szilárdságtan.* Budapest, Tankönyvkiadó.
- Petersen, Christian (1982): *Statik und Stabilität der Baukonstruktionen.* Wiesbaden–Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn.
- Rodríguez-Gutierrez, José A. and Aristizábal-Ochoa, J. Dario (2000): Partially and Fully Prestressed Concrete Sections under Biaxial Bending and Axial Load. *ACI Structural Journal* Vol. 97, No. 4, 553–563.
- Tarnai Tibor (1996): Unsymmetrical bending of beams: a matrix formulation. *Int. J. Mechanical Engineering Education* 24, 144–149.

- Weiler, Kevin and Atherton, Peter (1977): Hidden Surface Removal Using Polygon Area Sorting. *Computer Graphics* Vol. 11, 214–222.
- Yen, J. R. (1991): Quasi-Newton Method for Reinforced Concrete Cloumns Analysis and Design. *Journal of Structural Engineering, ASCE* Vol. 117, No. 3, 657–666.

## CALCULATING THE NEUTRAL AXIS OF CONCRETE SECTIONS UNDER BIAXIAL BENDING

### *Summary*

The deflections of concrete structures are commonly investigated under service loads. For calculating the position of the neutral axis non-linear equations must be solved. There is not an accepted general method, because the functions, which have been used, are sophisticated and their convergence features are not known.

This article presents a method for calculating the position of the neutral axis by a direct recursion. This method can be the generalization of the so-called Pelikán iteration, which can be used for symmetrical bending. (Pelikán, 1972) In the simplest case (rectangle section) we proved, that the new method always converges, it behaves better, than the original Pelikán iteration. In more sophisticated situations we experienced the same global convergence numerically.

**Keywords:** reinforced concrete, biaxial loads, bending, computer programs, Pelikán method, neutral axis, iteration, convergence.

